Лекция 3
Метод функций Ляпунова

Метод функций Ляпунова состоит в исследовании устойчивости точки покоя системы дифференциальных уравнений с помощью подходящим образом выбранной функции $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — так называемой *функции Ляпунова*, причем делается это без предварительного построения решения системы; в этом неоценимое преимущество метода.

Ограничимся рассмотрением автономных систем

$$\boxed{\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n,} \tag{1}$$

для которых $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, есть точка покоя.

Идея метода состоит в следующем. Предположим, что на устойчивость исследуется точка покоя $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, системы (1). Если бы с возрастанием t точки всех траекторий приближались к началу координат или хотя бы не удалялись от него, то рассматриваемая точка покоя была бы устойчивой. Проверка выполнения этого условия не требует знания решений системы. Действительно, если ρ — расстояние от точки траектории $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, до начала координат

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)},$$

то

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2}$$

(производная вдоль траектории). Правая часть в (2) есть известная функция от x_1, $x_2, \ldots, x_n$, и можно исследовать ее знак. Если окажется, что $\frac{d\rho}{dt} \leqslant 0$, то точки на всех траекториях не удаляются от начала координат при возрастании t и точка покоя $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, устойчива. Однако точка покоя может быть устойчивой и при немонотонном приближении к ней с возрастанием t точек траекторий (например, в случае, когда траектории — эллипсы). Поэтому А. М. Ляпунов вместо функции ρ рассматривал функции $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, являющиеся в некотором смысле «обобщенным расстоянием» от начала координат.

Определение 1. Функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная в некоторой окрестности начала координат, называется *знакоопределенной* (*знакоположительной* или *знакоотрицательной*), если в области G

$$|x_i| \leqslant h, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где h — достаточно малое положительное число, она может принимать значения только одного определенного знака и обращается в нуль лишь при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Так, в случае $n = 3$ функции

$$v = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

и

$$v = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$$

будут знакоположительными, причем здесь величина $h > 0$ может быть взята сколь угодно большой.

Определение 2. Функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *знакопостоянной* (*положительной* или *отрицательной*), если она в области G может принимать значения только одного определенного знака, но может обращаться в нуль и при

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0.$$

Например, функция

$$v(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2$$

будет знакопостоянной (положительной). В самом деле, функцию $v(x_1, x_2, x_3)$ можно представить так:

$$v(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2;$$

отсюда видно, что она неотрицательна всюду, но обращается в нуль и при $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$, а именно при $x_3 = 0$ и любых x_1, x_2 таких, что $x_1 = -x_2$.

Пусть $v(x_1, x_2, x_n)$ — дифференцируемая функция своих аргументов, и пусть

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$$

являются некоторыми функциями времени, удовлетворяющими системе дифференциальных уравнений (1). Тогдадля полной производной функции v по времени имеем

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{3}$$

Определение 3. Величина $\frac{dv}{dt}$, определяемая формулой (3), называется *полной производной функции v по времени, составленной в силу системы уравнений* (1).

Определение 4. Функцию $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, обладающую свойствами:

1) $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в некоторой окрестности Ω начала координат;

2) $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определенно-положительна (определенно-отрицательна) в Ω, и $v(0, 0, \ldots, 0) = 0$;

3) полная производная $\frac{dv}{dt}$ функции $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, составленная в силу системы (1),

$$\frac{dv}{dt} \leqslant 0 \quad \left(\frac{dv}{dt} \geqslant 0\right)$$

всюду в Ω, называют *функцией Ляпунова.*

Теорема 3 (теорема Ляпунова об устойчивости). *Если для системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

существует дифференцируемая знакоопределенная функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, полная производная $\frac{dv}{dt}$ которой по времени, составленная в силу системы (1), есть знакопостоянная функция (знака, противоположного с v) или тождественно обращается в ноль, то точка покоя $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$,) системы (1) устойчива.

◄ Приведем идею доказательства. Пусть для определенности $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть знакоположительная функция, для которой $\frac{dv}{dt} \leqslant 0$. Так как

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0,$$

причем $v = 0$ лишь при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, то начало координат есть точка строгого минимума функции $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В окрестности начала координат поверхности уровня

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$$

функции v являются, как можно показать, замкнутыми поверхностями, внутри которых находится начало координат. Чтобы картина стала нагляднее, остановимся на случае $n = 2$. Так как $v \leqslant 0$ для малых x_1, x_2 и $v = 0$ только для $x_1 = x_2 = 0$, то поверхность

$$z = v(x_1, x_2)$$

в общих чертах напоминает параболоид, вогнутый вверх (рис. 19).

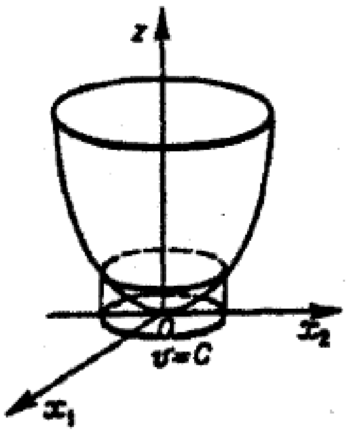

Рис. 19

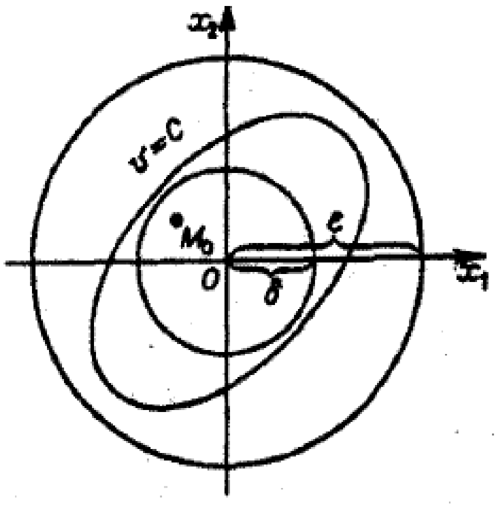

Рис. 20

Линии уровня $v(x_1, x_2) = C$ представляют собой семейство замкнутых кривых, окружающих начало координат. При этом если $C_1 < C_2$, то линия уровня $v = C_1$ целиком лежит внутри области, ограниченной линией $v = C_2$. Зададим $\varepsilon > 0$. При достаточно малом $C > 0$ линия уровня $v = C$ целиком лежит в ε-окрестности начала координат, но не проходит через начало. Следовательно, можно выбрать $\delta > 0$ такое, что δ-окрестность начала координат целиком лежит внутри области, ограниченной линией $v = C$, причем в этой окрестности $v < C$ (рис. 20).

Рассмотрим траекторию системы (1), выходящую в начальный момент времени $t = t_0$ из какой-нибудь точки $M_0(x_1(t_0), x_2(t_0))$ в δ-окрестности начала координат. Эта траектория при возрастании t никогда не пересечет ни одной из линий $v(x_1, x_2)$ изнутри наружу. В самом деле, если бы такое пересечение было возможным в какой-нибудь точке, то в этой точке или в ее окрестности функция $v(x_1(t), x_2(t))$ необходимо имела бы положительную производную $\frac{dv}{dt}$, так как при переходе от какой-нибудь линии $v = C$ к другой линии этого семейства, охватывающей первую, функция $v(x_1, x_2)$ возрастает. Но это невозможно в силу того, что по условию $\frac{dv}{dt} \leqslant 0$. Значит, если в начальный момент времени какая-нибудь траектория находилась внутри области, ограниченной линией $v = C$, то она и в дальнейшем будет все время оставаться внутри этой области. Отсюда ясно, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что любая траектория системы, выходящая в начальный момент времени $t = t_0$ из δ-окрестности начала координат, для всех $t \geqslant t_0$ будет содержаться в ε-окрестности начала. Это и означает устойчивость точки покоя $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, системы (1). ▶

Теорема 4 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Если для системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

существует дифференцируемая знакоопределенная функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, полная производная которой по времени, составленная в силу системы, есть также знакоопределенная функция знака, противоположного с v, то точка покоя $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, системы (1) асимптотически устойчива.

Пример. Исследовать на устойчивость точку покоя $O(0,0)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x. \tag{*}$$

◀ Выберем в качестве функции $v(x, y)$ функцию

$$v = x^2 + y^2.$$

Эта функция знакоположительная. В силу системы (*) найдем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2xy - 2xy \equiv 0.$$

Из теоремы 3 следует, что точка покоя $O(0,0)$ системы (*) устойчива (центр). Асимптотической устойчивости нет, так как траектория системы (*) — окружности. ▶

Пример 2. Исследовать на устойчивость точку покоя $O(0,0)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y^3. \tag{**}$$

◀ Беря опять

$$v(x, y) = x^2 + y^2,$$

найдем

$$\frac{dv}{dt} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - y^3) = -2(x^4 + y^4).$$

Таким образом, $\frac{dv}{dt}$ есть знакоотрицательная функция. В силу теоремы 4 точка покоя $O(0,0)$ системы (**) устойчива асимптотически. ▶

Теорема 5 (о неустойчивости). *Пусть для системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (f_i(0, 0, \ldots, 0) = 0), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

существует дифференцируемая в окрестности начала координат функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такая, что $v(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Если ее полная производная $\frac{dv}{dt}$, составленная в силу системы (4), есть знакоположительная функция и сколь угодно близко от начала координат имеются точки, в которых функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает положительные значения, то точка покоя $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, системы (4) неустойчива.

Пример 3. Исследовать на устойчивость точку покоя $O(0, 0)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = -y.$$

◀ Возьмем функцию

$$v(x, y) = x^2 - y^2.$$

Для нее функция

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2\left(x^2 + y^2\right)$$

знакоположительная. Так как сколь угодно близко к началу координат найдутся точки, в которых $v > 0$ (например, $v = x^2 > 0$ вдоль прямой $y = 0$), то выполнены все условия теоремы 5 и точка покоя $O(0, 0)$ неустойчива (седло). ▶

Метод функций Ляпунова оказывается универсальным и эффективным для широкого круга проблем теории устойчивости. Недостаток же метода в том, что достаточно общего конструктивного способа построения функций Ляпунова пока нет. В простейших случаях функцию Ляпунова можно искать в виде

$$v(x, y) = ax^2 + by^2, \quad v(x, y) = ax^4 + by^4, \quad a > 0, \quad b > 0 \quad \text{и т. д.}$$

Устойчивость по первому (линейному) приближению

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

и пусть $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, есть точка покоя системы, т. е.

$$f_i(0, 0, \ldots, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Будем предполагать, что функции $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируемы в окрестности начала координат достаточное число раз. Применяя формулу Тейлора, разложим функции f_i по x в окрестности начала координат:

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_i(0, 0, \ldots, 0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(0, 0, \ldots, 0)}{\partial x_j} x_j + R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

или, учитывая (2),

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(0, 0, \ldots, 0)}{\partial x_j} = \text{const},$$

а слагаемые R_i содержат члены не ниже второго порядка малости относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Система дифференциальных уравнений (1) примет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad a_{ij} = \text{const}. \tag{3}$$

Так как понятие устойчивости точки покоя $O(0, 0, \ldots, 0)$ связано с малой окрестностью начала координат в фазовом пространстве, то естественно ожидать, что поведение решения (1) будет определяться главными линейными членами разложения функций f_i по x. Поэтому наряду с системой (3) рассмотрим систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

называемую *системой уравнений первого (линейного) приближения* для системы (3).

Вообще говоря, строгой связи между системами (3) и (4) нет.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^2. \tag{5}$$

Здесь $f(x) \equiv 0$; линеаризированное уравнение для уравнения (5) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Решение $x(t) \equiv 0$ уравнения (6) является устойчивым. Оно же, будучи решением исходного уравнения (5), не является для него устойчивым. В самом деле, каждое действительное решение уравнения (5), удовлетворяющее начальному условию $x\big|_{t=0} = x_0 > 0$, имеет вид $x = \frac{x_0}{(1-tx_0)}$ и перестает существовать при $t = \frac{1}{x_0}$ (решение непродолжаемо вправо).

Теорема 6. *Если все корни характеристического уравнения*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

имеют отрицательные действительные части, то точка покоя $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, системы (4) *и системы* (3) *асимптотически устойчива.*

При выполнении условий теоремы возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

Теорема 7. *Если хотя бы один корень характеристического уравнения* (7) *имеет положительную действительную часть, то точка покоя* $x_i = 0$ *системы* (4) *и системы* (3) *неустойчива.*

В этом случае также возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

Наметим идею доказательства теорем 6 и 7.

◄ Пусть для простоты корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения (7) — действительные и различные. В этом случае существует такая невырожденная матрица T с постоянными элементами, что матрица $T^{-1}AT$ будет диагональной:

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — матрица из коэффициентов системы (4). Положим

$$X = TY, \quad \text{где} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\frac{dX}{dt} = T\frac{dY}{dt},$$

и система (4) преобразуется к виду

$$T\frac{dY}{dt} = ATY.$$

Отсюда получаем

$$\frac{dY}{dt} = T^{-1}ATY,$$

или, в силу выбора матрицы T,

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Система (3) при том же преобразовании перейдет в систему

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i + \widetilde{R}_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{8}$$

причем в $\widetilde{R}_i$ опять входят члены не ниже второго порядка малости относительно y_i при $y_i \to 0$.

Рассмотрим следующие возможности:

1. Все корни λ_k — отрицательные. Положим

$$v = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2,$$

тогда производная $\frac{dv}{dt}$ в силу системы (8) будет иметь вид

$$\frac{dv}{dt} = 2\left(\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + y_n^2\right) + S(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

где $S(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ при $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 \to 0$ — малая более высокого порядка, чем квадратичная форма $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$.

Таким образом, в достаточно малой окрестности Ω точки $O(0, 0, \ldots, 0)$ функция $v(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ знакоположительна, а производная $\frac{dv}{dt}$ — знакоотрицательна, и, значит, точка покоя $O(0, 0, \ldots, 0)$ асимптотически устойчива.

2. Некоторые из корней λ_k (например, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, $m \leqslant n$) положительные, а остальные — отрицательные. Положим

$$v = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2 - y_{m+1}^2 - \ldots - y_n^2,$$

тогда

$$\frac{dv}{dt} = 2\left(\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_m y_m^2 - \lambda_{m+1} y_{m+1}^2 - \lambda_n y_n^2\right) + S(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Отсюда видно, что сколь угодно близко к началу координат найдутся точки (например, такие, у которых $y_{m+1} = \ldots = y_n = 0$), где $v > 0$. Что касается производной $\frac{dv}{dt}$, то, поскольку $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ отрицательны, производная $\frac{dv}{dt}$ — знакоположительная функция. В силу теоремы 5 точка покоя $O(0, 0, \ldots, 0)$ неустойчива.

В критическом случае, когда все действительные части корней характеристического уравнения неположительны, причем действительная часть хотя бы одного корня равна нулю, на устойчивость тривиального решения системы (3) начинают влиять нелинейные члены R_i и исследование на устойчивость по первому приближению становится невозможным. ▶

Пример 1. Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя $x = 0$, $y = 0$ системы

$$\frac{dx}{dt} = -x + 2y - 5y^2, \quad \frac{dy}{dt} = 2x - y + \frac{x^3}{2}. \tag{$*$}$$

◀ Система первого приближения имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = -x + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x - y. \tag{$**$}$$

Нелинейные члены удовлетворяют нужным условиям: их порядок не меньше 2. Составляем характеристическое уравнение для системы (**):

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. Поскольку $\lambda_1 > 0$, нулевое решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы (*) неустойчиво. ▶

Пример 2. Исследуем на устойчивость точку покоя $O(0, 0)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y^3. \tag{$*$}$$

◀ Точка покоя $x = 0$, $y = 0$ системы (*) асимптотически устойчива, так как для этой системы функция Ляпунова

$$v = x^2 + y^2$$

удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. В частности,

$$\frac{dv}{dt} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - y^3) = -2(x^4 + y^4) \leqslant 0.$$

В то же время точка покоя $x = 0$, $y = 0$ системы

$$\frac{dx}{dt} = y + x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y^3 \tag{**}$$

неустойчива.

В самом деле, для функции $v(x, y) = x^2 + y^2$ в силу системы (**) имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x(y + x^3) + 2y(-x + y^3) = 2(x^4 + y^4),$$

т. е. $\frac{dv}{dt}$ — функция знакоположительная. Сколь угодно близко от начала координат $O(0,0)$ имеются точки, в которых $v(x,y) > 0$.

В силу теоремы 5 заключаем о неустойчивости точки покоя $O(0,0)$ системы (**).

Для системы (*) и (**) система первого приближения одна и та же:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x. \tag{***}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

для системы (***) имеет чисто мнимые корни — критический случай (действительные части корней характеристического уравнения равны нулю). Для системы первого приближения (***) начало координат является устойчивой точкой покоя — центром. Системы (*) и (**) получаются малым возмущением правых частей (***) в окрестности начала координат. Однако эти малые возмущвния приводят к тому, что для системы (*) точка покоя $O(0, 0)$ становится асимптотически устойчивой, а для системы (**) — неустойчивой. ▶

Этот пример показывает, что в критическом случае нелинейные члены могут влиять на устойчивость точки покоя.

Задача. Исследовать на устойчивость точку покоя $O(0, 0)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = y - xf(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -x - yf(x, y),$$

где функция $f(x, y)$ разлагается в сходящийся степенной ряд и $f(0, 0) = 0$.